12. Convergência das séries de Fourier

Lembrete 12.0.1 Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, assim a série de Fourier de f é

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi n x}{L}dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{\pi n x}{L}dx.$$

■ **Exemplo 12.1** Ache $S[f]$ para $f(x) = x$, e $x \in [-\pi, \pi]$. Como f é impar, temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(nx)dx = 0,$$

Por outro lado (veja lembrete acima) temos

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \operatorname{sen}(nx)dx = \left\{ \begin{array}{c} u' = \operatorname{sen} x \\ v = x \end{array} \right\} = -\frac{1}{\pi} x \frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}dx$$

$$= -2\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2 \cdot (-1)^n}{n} = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

Assim, $S[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$.

Lembrete 12.0.2 — Integração por partes. Usando que $(uv)' = u'v + v'u$, temos

$$\int (uv)'dx = uv = \int (u'v + v'u)dx.$$

Portanto

$$\int u'vdx = uv - \int v'udx.$$

■ **Exemplo 12.2** Ache $S[f]$ para $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$. Temos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

e

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\cos(nx)dx = \left\{\begin{array}{c} u' = \cos(nx) \\ v = x^2 \end{array}\right\} \\
=& \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\cdot x^2\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\cdot\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}dx = \left\{\begin{array}{c} u' = -\operatorname{sen}(nx) \\ v = \dfrac{2x}{n} \end{array}\right\} \\
=& \frac{1}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\cdot\frac{2x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\cdot\frac{2}{n}dx = \frac{2}{\pi n^2}(\pi\cos(\pi n) + \pi\cos(\pi n)) - \frac{2}{\pi n^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
=& \frac{4}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n\cdot 4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Alem disso

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\operatorname{sen}(nx)dx = 0,$$

desde que $f(x)\cdot\operatorname{sen}(nx)$ é função impar.

12.1 Convergência pontual das séries de Fourier

Definição 12.1.1 Uma função f é *contínua por partes* em $[-L, L]$ se

1) Existem

$$-L = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = L$$

tais que f é contínua em (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, p$.

2) e $\lim_{x\to x_i\pm} f(x)$ existem e são finitos.

Veja na Figura 12.1 função contínua por partes e na Figura 12.2 função não contínua por partes.

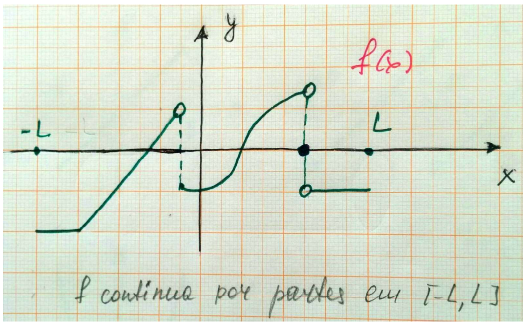

Figure 12.1: Função contínua por partes

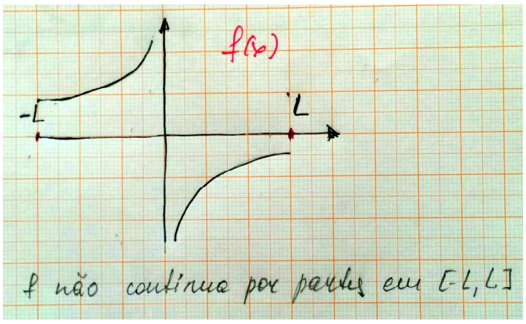

Figure 12.2: Função não contínua por partes

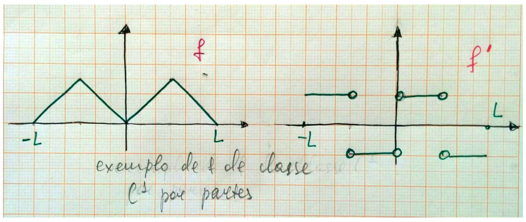

Figure 12.3: Função f de classe C^1 por partes

Definição 12.1.2 Uma função f *é de classe* C^1 por partes em $[-L, L]$ se f e f' forem contínuas por partes em $[-L, L]$.

Veja na Figura 12.3 exemplo da função f de classe C^1 por partes.

Teorema 12.1.1 — de convergência pontual. Seja f de classe C^1 por partes em $[-L, L]$, assim

1) para cada $x_0 \in (-L, L)$

$$S[f](x_0) = \frac{\lim_{x \to x_0-} f(x) + \lim_{x \to x_0+} f(x)}{2},$$

2)

$$S[f](\pm L) = \frac{\lim_{x \to -L+} f(x) + \lim_{x \to L-} f(x)}{2},$$

3) $S[f]$ é $2L$-periódica.

Obs Se f for contínua em $x_0 \in (-L, L)$, assim $S[f](x_0) = f(x_0)$.

■ **Exemplo 12.3** Usando exemplo 12.1 temos para $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$,
Aplicando Teorema 12.1.1, temos

$$S[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx) = f(x) = x,\ x \in (-\pi, \pi).$$

e

$$S[f](\pm\pi) = \frac{\lim_{x \to -\pi+} x + \lim_{x \to \pi-} x}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0,$$

onde $S[f]$ é 2π-periódica.

■ **Exemplo 12.4** Se $f(x) = x^2$, com $x \in [-\pi, \pi]$. Logo (aplicando o Exemplo 12.2 e o Teorema 12.1.1), temos

$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} \cos(nx) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

e

$$S[f](\pm\pi) = \frac{\lim_{x \to -\pi+} x^2 + \lim_{x \to \pi-} x^2}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2.$$

Logo $S[f] = x^2$ para todo $x \in (-\pi, \pi)$ e $S(f)$ é 2π-periódica.
Seja $x = 0$, então

$$S[f](0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} \cdot 1 = 0.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3}$$

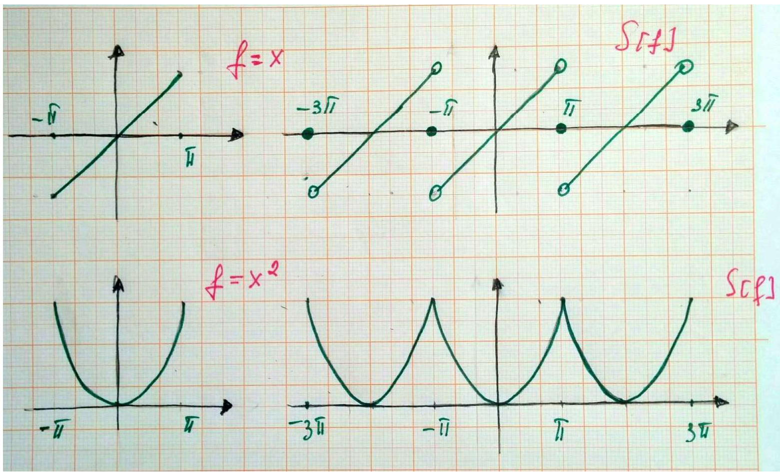

Figure 12.4: Exemplos 12.3 e 12.4

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

(soma de série harmônica alternada). Seja $x = \pi$, assim

$$S[f](\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} \cdot \cos(\pi n) = \pi^2.$$

Portanto

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \cdot 4}{n^2} = \pi^2$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(soma de série harmônica).

■ **Exemplo 12.5** Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ -2 \le x \le 0, \\ 1, \ 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Temos $[-L, L] = [-2, 2]$. Logo

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} 1 \cdot dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^2 = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = 0.$$

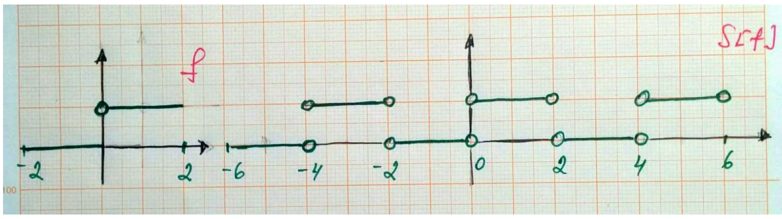

Figure 12.5: Função $S[f]$ do Exemplo 12.5

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\mathrm{sen}\,\frac{\pi n x}{2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2$$
$$= -\frac{1}{\pi n}(\cos(\pi n)-1) = -\frac{1}{\pi n}((-1)^n-1) = \begin{cases} 0, \ n=2k, \\ \dfrac{2}{\pi(2k-1)}, \ n=2k-1. \end{cases}$$

Assim,

$$S[f] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi(2k-1)x}{2}.$$

Então $S[f]$ é $2L = 4$-periódica, alem disso $S[f](x) = f(x)$, para $x \in (-2,0)\cup(0,2)$. Temos

$$S[f](0) = \frac{\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 0+} f(x)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$S[f](\pm 2) = \frac{\lim_{x\to 2-} f(x) + \lim_{x\to -2+} f(x)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Resumindo

$$S[f](x) = \begin{cases} 0, & -2+4n < x < 4n, \\ 1, & 4n < x < 2+4n, \\ \frac{1}{2}, & x = 2k. \end{cases} \qquad n,k \in \mathbb{Z}$$

Por exemplo, $S[f](4) = S[f](0+4) = S[f](0) = \dfrac{1}{2}$ e

$$S[f](601) = \{601 = 600+1 = 4\cdot 150+1\} = S[f](4\cdot 150+1) = S[f](1) = 1.$$

■ **Exemplo 12.6** Seja $f(x) = |\,\mathrm{sen}\,x|$ para $x \in [-\pi,\pi]$. Neste caso

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\mathrm{sen}(nx)dx = 0,$$

como $f(x)$ é função par.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\,\mathrm{sen}\,x|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}\,x dx = \frac{-2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

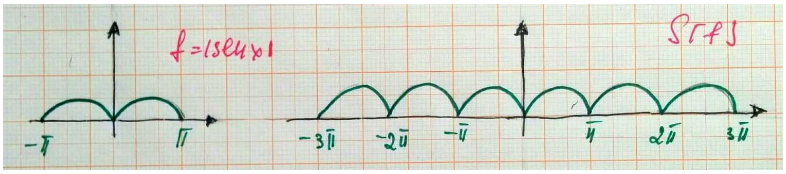

Figure 12.6: Função $S[f]$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)|\operatorname{sen}(x)|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\cdot\operatorname{sen}x dx \\
&= \left\{\cos(nx)\cdot\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}((n+1)x)-\operatorname{sen}((n-1)x)]\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}((n+1)x)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}((n-1)x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{-\cos((n+1)x)}{n+1}\Big|_0^{\pi} + \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\cos((n-1)x)}{n-1}\Big|_0^{\pi}, & n\neq 1, \\ 0, \quad n=1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{\pi(n+1)}[-\cos((n+1)\pi)+1] + \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-1)}(\cos((n-1)\pi)-1), & n\neq 1, \\ 0, \quad n=1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(n+1)}, & n=2k, \\ 0, \quad n=2k+1 \end{cases} + \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi(n-1)}, & n=2k, \\ 0, \quad n=2k+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k, \\ 0, \quad n=2k+1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$S[f](x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kx).$$

Por Teorema 12.1.1 temos

$$S[f](x) = |\operatorname{sen}x|, \quad x\in[-\pi,\pi],$$

e $S[f]$ é 2π-periódica.